



Statistik II: Signifikanztests /1

Dr. Andreas Vlašić

Medien Institut

☎ (0621) 52 67 44

💻 vlasic@medien-institut.de



Gliederung

- ▶ **1. Noch einmal: Grundlagen des Signifikanztests**
- 2. Der χ^2 -Test
- 3. Der t-Test
- 4. Der U-Test
- 5. Key Facts



Nochmal: Die Logik wissenschaftlicher Tests

- Voraussetzung für die Durchführung von wissenschaftlichen Tests:
Überführung von Hypothesen in statistische Hypothesen
- Statistische Hypothesen: *Unterschiede* und *Zusammenhänge*
- *Alternativhypothese* und *Nullhypothese*
 - *Nullhypothese* H_0 : Unterschiede/Zusammenhänge sind zufällig
 - *Alternativhypothese* H_1 : Unterschiede/Zusammenhänge sind nicht zufällig
- Einseitige (gerichtete) und zweiseitige (ungerichtete) Hypothesen
 - *Einseitige Hypothese*: Mehr Männer als Frauen tragen eine Brille
 - *Zweiseitige Hypothese*: Die Anzahl von Brillenträgern ist bei Männern und Frauen unterschiedlich

α -Fehler und β -Fehler

		In der Population gilt:	
		H_0	H_1
Entscheidung aufgrund der Stichprobe zugunsten:	H_0	richtige Entscheidung	β-Fehler (Fehler 2. Art)
	H_1	α-Fehler (Fehler 1. Art)	richtige Entscheidung

- Fehlerarten
 - α -Fehler: Alternativhypothese wird fälschlicherweise angenommen
 - β -Fehler: Alternativhypothese wird fälschlicherweise verworfen
- Benennung α :
 - Signifikanzniveau, Irrtumswahrscheinlichkeit, Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art

Analogie: α -Fehler und β -Fehler vor Gericht

		Angeklagter ist...	
		H_0 : unschuldig	H_1 : schuldig
Gericht entscheidet...	H_0 : unschuldig	richtige Entscheidung	β-Fehler (Fehler 2. Art)
	H_1 : schuldig	α-Fehler (Fehler 1. Art)	richtige Entscheidung

- Fehlerarten
 - α -Fehler: Angeklagter wird zu Unrecht verurteilt
 - β -Fehler: Angeklagter wird fälschlicherweise freigelassen
- α : Nötiges Gewicht an Beweisen, um Angeklagten zu verurteilen

Exkurs: Signifikanz und die zwei Statistiken

- Ursprüngliche Definition von *Signifikanz*: Die Wahrscheinlichkeit der erhobenen Daten (Stichprobe) unter der Annahme, dass die Nullhypothese zutrifft
 - Nach *Fisher* nur Testen (und falsifizieren) von Nullhypothesen möglich, später Erweiterung des Signifikanzbegriffs durch *Pearson/Neyman* auf das Testen von Alternativhypothesen ⇨ Hybrid-Logik
 - Weit verbreitete Auffassung: „Wahrscheinlichkeit, dass eine Hypothese zutrifft“
 - Das Konzept der Signifikanz sagt im Grunde nichts aus über
 - die Größe eines Effekts
 - die Replizierbarkeit eines Ergebnisses
 - die Wahrscheinlichkeit einer Hypothese
- ⇨ Nicht blind den Zahlen vertrauen, sondern Konzept-geleitet analysieren!

Induktive Statistik und Signifikanz

- Problem: keine Vollerhebungen, aber Verallgemeinerung auf Grundgesamtheit
→ Testverfahren der *induktiven Statistik*
- Grundmodell des Signifikanztestens:
 - *Nullhypothese* H_0 : Unterschiede/Zusammenhänge sind zufällig
 - *Alternativhypothese* H_1 : Unterschiede/Zusammenhänge sind nicht zufällig
- *Irrtumswahrscheinlichkeit* p („Signifikanz“) wird mit Werten zwischen 0 und 1 angegeben, kann niemals 0 sein

Irrtumswahrscheinlichkeit	Bedeutung	Symbolisierung
$p > 0.05$	nicht signifikant	n.s.
$p \leq 0.05$	signifikant	*
$p \leq 0.01$	hochsignifikant	**
$p \leq 0.001$	höchst signifikant	***

Gliederung

1. Noch einmal: Grundlagen des Signifikanztests

▶ 2. **Der χ^2 -Test**

3. Der t-Test

4. Der U-Test

5. Key Facts

Der χ^2 -Test auf Unabhängigkeit

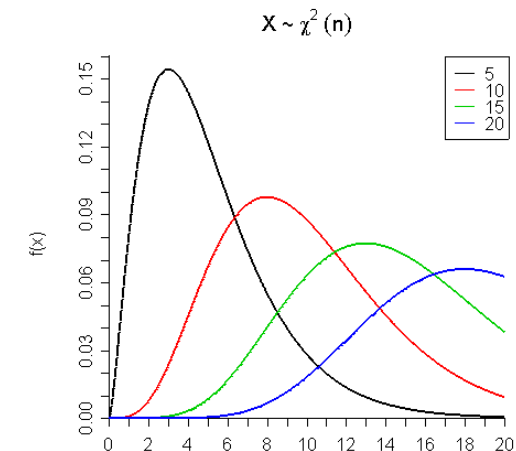
- Der χ^2 -Test überprüft die Unabhängigkeit zweier Merkmale in einer Kreuztabelle und damit indirekt ihren Zusammenhang
- Üblicherweise wird χ^2 nach Pearson berechnet:

$$\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E}$$

O: Die Anzahl der tatsächlich beobachteten Fälle in einer Zelle (observed)

E: Die Anzahl der erwarteten Fälle in einer Zelle unter der Annahme, dass die Variablen unabhängig voneinander sind (expected)

- Residuen: Abweichung der beobachteten von den erwarteten Werten



f	$\chi^2_{f;0,90}$	$\chi^2_{f;0,95}$	$\chi^2_{f;0,975}$	$\chi^2_{f;0,99}$	$\chi^2_{f;0,995}$
1	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879
2	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597
3	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838
4	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860
5	9,236	11,070	12,833	15,086	16,750
6	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548
7	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278
8	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955
9	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589
10	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188

Der chi²-Test: Ein Beispiel

	Männer	Frauen	
Mit Brille	O: 25 E: 18 R: 7 R _{stand} : 1,65	O: 15 E: 22 R: -7 R _{stand} : -1,49	40
Ohne Brille	O: 20 E: 27 R: -7 R _{stand} : -1,35	O: 40 E: 33 R: 7 R _{stand} : 1,22	60
	45	55	100

1. Erwartete Werte:
E = Zeilensumme x
Spaltensumme /
Gesamtsumme

2. Residuen:
R = O - E

3. Chi-Quadrat nach
Pearson (ganze Tabelle):

$$\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E} = 8,24$$

Signifikanz = 0,004


4. Standardisierte
Residuen (einzelne
Zelle):

$$R_{\text{stand}} = R / \sqrt{E}$$

Voraussetzungen für den χ^2 -Test

- Keine Zelle ohne Besetzung
- Nicht mehr als 20% aller Zellen mit Besetzung < 5
- Beobachtungen müssen voneinander unabhängig sein
- Jede Beobachtungseinheit kann eindeutig einer Merkmalskategorie oder Kombination von Merkmalskategorien zugeordnet werden

Gliederung

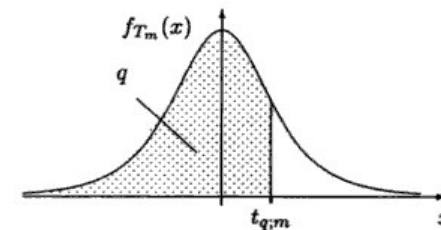
1. Noch einmal: Grundlagen des Signifikanztests
2. Der χ^2 -Test
-  3. **Der t-Test**
4. Der U-Test
5. Key Facts



Der t-Test

- Der t-Test prüft, ob sich der Mittelwert einer metrischen Variablen in zwei verschiedenen Gruppen signifikant unterscheidet

$$\hat{t} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{N_1} + \frac{s_2^2}{N_2}}}$$




- t-Test für abhängige vs. unabhängige Stichproben

$m \backslash q$	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995
1	6.31	12.71	31.82	63.66	318.31	636.62
2	2.92	4.30	6.96	9.92	22.33	31.60
3	2.35	3.18	4.54	5.84	10.21	12.92
4	2.13	2.78	3.75	4.60	7.17	8.61
5	2.02	2.57	3.36	4.03	5.89	6.87
6	1.94	2.45	3.14	3.71	5.21	5.96
7	1.89	2.36	3.00	3.50	4.79	5.41
8	1.86	2.31	2.90	3.36	4.50	5.04
9	1.83	2.26	2.82	3.25	4.30	4.78

- Voraussetzung
 - Normalverteilung (sonst nicht-parametrische Tests wie U-Test)
 - vergleichbare Gruppengrößen
 - Gleichheit der Varianzen (Levene-Test)

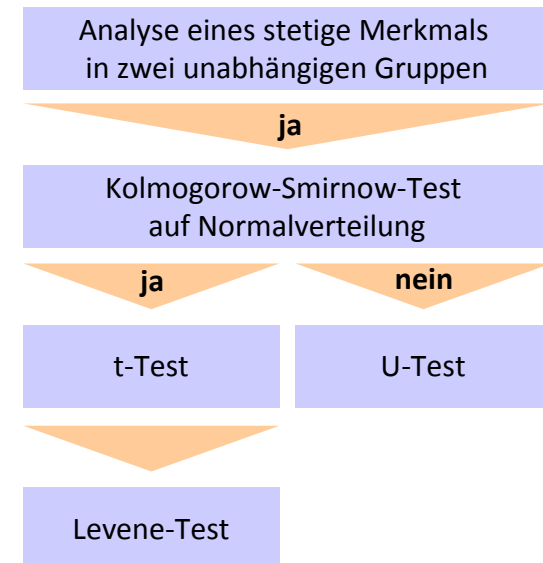
Gliederung

1. Noch einmal: Grundlagen des Signifikanztests
2. Der χ^2 -Test
3. Der t-Test
-  4. **Der U-Test**
5. Key Facts



Der U-Test nach Wilcoxon, Mann und Whitney

- Voraussetzung für chi²-Test auf Unabhängigkeit und t-Test: Normalverteilung
 - wenn nicht gegeben: verteilungsfreie (nichtparametrische) Tests als Alternative
- Test auf Vorliegen einer Normalverteilung: Kolmogorow-Smirnow-Anpassungstest
- U-Test: Verteilungsfreier Test auf Unterschiede zweier Gruppen im Hinblick auf ein stetiges Merkmal
 - Vergleich der Rangsummen der Messwerte eines Merkmals in zwei Gruppen
- Voraussetzungen
 - abhängige Variable mindestens ordinalskaliert
 - unabhängige Stichproben



Gliederung

1. Noch einmal: Grundlagen des Signifikanztests
2. Der χ^2 -Test
3. Der t-Test
4. Der U-Test
- ▶ 5. **Key Facts**

Key Facts

- Was ist der Unterschied zwischen einer gerichteten und einer ungerichteten Hypothese?
- Welcher Logik folgen Signifikanztests?
- Was ist der α -Fehler, was der β -Fehler?
- Was prüft der χ^2 -Test, wie ist er aufgebaut?
- Was sind Residuen?
- Welche Voraussetzungen hat der χ^2 -Test?
- Was prüft der t-Test, welche Voraussetzungen müssen gegeben sein?
- Was ist das Ziel des U-Tests, in welchen Fällen wird er eingesetzt?

Übungsaufgaben

■ Chi²-Tests

- Unterscheiden sich Personen mit niedrigem HH-Einkommen (bis 2000 DM) und hohem HH-Einkommen (7000 DM und mehr) nach Geschlecht?
- Welche Unterschiede gibt es generell zwischen HH-Einkommen und dem Geschlecht der Befragten?
- Gibt es bezüglich der Bekanntheit des Unternehmens X („schon mal gehört“) einen signifikanten Unterschied zwischen Welle 1 und 2? Ist er geschlechtsspezifisch?

■ T-Tests

- Gibt es einen Unterschied beim Durchschnittsalter von Männern und Frauen?
- Gibt es einen Unterschied beim durchschnittlichen Einkommen von Männern und Frauen? Wie sieht es in den Berufsgruppen aus?
- Wird das Unternehmen X in Welle 1 und 2 unterschiedlich bewertet?